2nd test (Ist year)
Mathematics (104)
Govt. Poly. college Karoli (campus - Alwar)

Max. Marks 15
time -: 1 hour
Date -: 18/1/2018

Q. 1. निम्न लिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

(a) निम्न समीकरण निकाय को Cramer's rule की सहायता से हल कीजिए। (2½)

Answer

$$x + y + z = 1$$
$$x + 2y + 3z = -4$$
$$x + 3y + 4z = -6$$

ans. यहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow D = |A| = 1\times(8-9) - 1\times(4-3) + 1\times(3-2)$
$= -1 - 1 + 1 = -1$

$\Rightarrow D \neq 0$ ; अतः दिये गये समीकरण निकाय का हल संभव है, व अद्वितीय है।

अब $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times(8-9) - 1\times(-16+18) + 1\times(-12+2)$
$= -1 - 2 + 0 = -3$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 1(-16+18) - 1(4-3) + 1(-6+4)$
$= 2 - 1 - 2 = -1$

Scanned by CamScanner

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 1(-12+12) - 1(-6+4) + 1(3-2)$$
$$= 0 + 2 + 1 = 3$$

अतः दिये गये समीकरणों का अद्वितीय हल है :

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$\Rightarrow \quad x = 3 \; ; \; y = 1 \; ; \; z = -3$$

(b) सिद्ध कीजिए $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ ----(2½)

ans :- L.H.S

$$= \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$$= a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

संक्रिया $R_2 \to R_2 + R_1$

$$= a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

संक्रिया $R_3 \to R_3 + R_1$

$$= a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4a^2b^2c^2 \left[-1(0-1) - 1(0-0) + 1(0-0)\right]$$

$$= 4a^2b^2c^2$$

Q.2 निम्नलिखित प्रश्नो के उत्तर दीजिये

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि A एक हर्मीशियन मैट्रिक्स है: (2½)

ans यहाँ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1-2i \\ 1+2i & 3 \end{bmatrix}$

$$\overline{(A^T)} = \begin{bmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{bmatrix} = A$$

अतः $\overline{(A^T)} = A \Rightarrow A^* = A$

अर्थात A एक हर्मीशियन मैट्रिक्स है।

Scanned by CamScanner

(b) सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ मे $A_{11}$, $A_{32}$, $A_{23}$ सहखण्डज ज्ञात कीजिए ---(2½)

ans :- $a_{11}$ का सहखंडज $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 1 = 13$$

$a_{32}$ का सहखंडज $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 15) = 14$$

$a_{23}$ का सहखंडज $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 0) = -1$$

$\Rightarrow A_{11} = 13$ ; $A_{32} = 14$ ; $A_{23} = -1$

Q.3 निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

(a) यदि $x = \log t + \sin t$ ; $y = e^t + \cos t$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। (2½)

ans दिया गया फलन t मे प्राचलिक समीकरण है

$x = \log t + \sin t$ $\quad\quad y = e^t + \cos t$

x व y का t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} + \cos t \quad\quad \frac{dy}{dt} = e^t - \sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t - \sin t}{\frac{1}{t} + \cos t} = \frac{t(e^t - \sin t)}{1 + t\cos t}$$

Scanned by CamScanner

Q.3

(b) $y = \sin e^{3x}$ : $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिये। $(2\frac{1}{2})$

Ans :- दिया गया फलन है $y = \sin e^{3x}$

माना $u = e^{3x}$ तथा $v = 3x$

तब $y = \sin u$ ; $u = e^v$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin u) = \frac{d}{du}(\sin u) \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

चूंकि $u = e^v \Rightarrow \frac{du}{dv} = e^v$

$v = 3x \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 3$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos u \cdot e^v \cdot 3 = 3e^{3x} \cos e^{3x}$

Scanned by CamScanner